Розглядається початкова задача про розподіл температури на нескінченності для напівлінійного параболічного рівняння другого порядку, що містить член поглинання. Проводиться аналіз поведінки носія розв'язку задачі Коші для зазначеного вище диференціального рівняння в частинних похідних. Доведено, що при певних умовах на параметри задачі спостерігається стиснення носія

Ключові слова: розв'язок, задача Коші, диференціальне рівняння в частинних похідних, носій

Рассматривается начальная задача о распределении температуры на бесконечности для полулинейного параболического уравнения второго порядка, которое содержит член поглощения. Проводится анализ поведения носителя решения задачи Коши для указанного выше дифференциального уравнения в частных производных. Доказано, что при определенных условиях на параметры задачи наблюдается сжатие носителя

Ключевые слова: решение, задача Коши, дифференциальное уравнение в частных производных, носитель

УДК 517.9

DOI: 10.15587/1729-4061.2016.80788

АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ НОСІЯ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

К. В. Стєпанова
Кандидат фізико-математичних наук, викладач
Кафедра вищої математики та економіко-математичних методів
Харківський національний економічний університет ім. Семена Кузнеця
пр. Науки, 9-а, м. Харків, Україна, 61166
E-mail: stepanova.ekaterina@hneu.net

1. Вступ

Рівняння з частинними похідними другого порядку параболічного типу зустрічаються частіш за все при вивченні процесів теплопровідності та дифузії. Як відомо, процес розподілу тепла в просторі може бути в повній мірі описаний температурою $u(x, t)$, де $x\in\mathbb{R}^n$. Якщо температура непостійна, то виникають теплові потоки, які спрямовані від місць з більш високою температурою до місць з найбільш низькою температурою. Тут будуть розглянуті температурні процеси в досить великому інтервалі зміни температур, що приводить до квазілінійних рівнянь теплопровідності. Отже, запишемо дивергентне параболічне рівняння в загальному вигляді:

$$u_t = \operatorname{div}\left(k\left(u,u_x\right)\nabla u\right)+F\left(x,t\right),$$

де

$$\operatorname{div} A\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

для

$$A\left(x\right)=\left(A_1\left(x\right),\ldots,A_n\left(x\right)\right);$$

$k\left(u,u_x\right)$ – коефіцієнт температуропровідності;

$$\nabla u=\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x_1\ldots\partial x_n};$$

$F\left(x,t\right)$ – щільність теплових джерел (потоків).

Актуальною та цікавою є задача дослідження властивостей розв'язку задачі з початковими даними (задача Коші) про розподіл температури на нескінченності: знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$u_t = \operatorname{div}\left(k\left(u,u_x\right)\nabla u\right)+F\left(x,t\right)$$

в області $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, який задовольняє умові:

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Питання щодо існування та єдності розв'язку такої задачі вивчалась багатьма авторами та вирішенні успішно (наприклад, в [1, 2]). Крім того, у випадку конкретного коефіцієнту температуропровідності та певної щільності теплових потоків, маємо справу з процесом

$$u_t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\nabla u\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\left|u\right|^{\lambda-1}u,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,$$

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

На сьогоднішній день відомо [3–6], що для вищезазначеної початкової задачі спостерігається явище миттєвої компактифікації носія розв'язку, коли, не дивлячись на те, що носій початкової функції може співпадати з усім простором $\mathbb{R}^n$, у розв'язка він стає компактним в будь-який скільки завгодно малий момент часу $t>0$ та сжимається в початкові моменти часу. Вивченню та дослідженню цього явища присвячено цю статтю.

Робота [7] була першою, де систематично вивчили властивість миттєвої компактифікації для напівлінійного рівняння теплопровідності

$$u_t=\Delta u+b\left(u\right),\ b\left(0\right)=0,\ b\left(s\right)>0\ \ \forall s>0.$$

В [7] знайдені умови на поведінку функції b(u) в околі нуля, які гарантують властивість миттєвої компактифікації за умови невід'ємної, неперервної, обмеженої початкової функції, що прямує до нуля на нескінченності.

Для варіаційних нерівностей властивість миттєвої компактифікації була досліджена в [8]. В роботах [9, 10] до одновимірного рівняння

$$u_t = \left(u^m\right)_{xx} - g\left(x\right)u^p$$

був застосований метод, який базується на порівняльному принципі. Було встановлено, що якщо

$$u_0 \le c_0\left(1+\left|x\right|\right)^{-\gamma}, g\left(x\right) \ge c_1\left(1+\left|x\right|\right)^{-\beta},$$

$$m \ge 1, p \in \left(0,1\right), \beta > 0, \gamma > 0, c_i > 0,$$

то задача, про яку йдеться, має властивість миттєвої компактифікації.

Підкреслимо, що аналогічний феномен може виникнути в інших фізично важливих моделях. Так, в [11] для рівняння

$$u_t = \left(u^m\right)_{xx} + \left(u^n\right)_x, 0 < n < 1, \quad m \ge 1$$

було доведено наступний результат:

$$\text{якщо } u_0\left(x\right) \sim cx^{-\frac{1}{1-n}} \text{ при } x \to \infty, \text{ тоді}$$

$$u\left(x,t\right) > 0,\ t \in \left(0, \frac{1}{n}c^{1-n}\right),\ x \ge x_0 > 0$$

та розв'язок u(x, t) має компактний носій, коли

$$t > \frac{1}{n}c^{1-n}.$$

Крім того, звідси випливає явище миттєвої компактифікації, при умові:

$$u_0 = o\left(x^{-\frac{1}{1-n}}\right).$$

Аналогічні результати були отримані в [12]. Для квазілінійного параболічного рівняння другого порядку дивергентного вигляду з початковими даними з L_q [13].

В статті [14] розглянуто рівняння дифузії з неоднорідним джерелом. Виділено два випадки, коли радіус носія залежить та не залежить від геометрії області.

Але, зауважимо тут, що більшість проаналізованих вище результатів були отримані для невід'ємних розв'язків і з умовою на початкову функцію: або $u_0 \to 0,\ \left|x\right| \to \infty$, або вона має мажоранту. Основним інструментом при отриманні результатів був принцип максимуму. Виходить, що якщо початкова функція не має монотонної мажоранти, наприклад, як у випадку

$$u_0\left(+k\right) = 1,\ k \in Z,\ u_0\left(x\right) > 0, \quad X \in \mathbb{R},$$

тоді навіть для самого простого рівняння

$$u_t = u_{xx} - u^p,\ 0 < p < 1$$

необхідних результатів немає, оскільки лише порівняльного принципу тут недостатньо. Для рівнянь більш високого порядку ми взагалі не маємо таких принципів. Таким чином, виникає актуальна проблема – знайти новий підхід, що дасть змогу аналізувати поведінку розв'язку в ситуаціях більш складних та загальних, де не накладаються додаткові умови на функцію з умови Коші.

Отже, розглянемо наступну задачу:

$$u_t - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\nabla u\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \left|u\right|^{\lambda-1}u = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де через ∇u позначено, як це прийнято в літературі, градієнт, тобто:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n};$$

p та λ – це додатні дійсні числа; початкова функція з умови Коші (2) така, що $u_0(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$; n – розмір простору, $n \ge 1$.

3. Ціль та задачі дослідження

Метою роботи є вивчення поведінки розв'язку для широкого класу нелінійних диференційних рівнянь в частинних похідних через застосування принципово нового підходу, що був запропонований в [3]. Більш деталізовано: ми зацікавлені в феномені під назвою "компактифікація" (або "миттєве скорочення") носія розв'язку supp u(x, t), де

$$\operatorname{supp} u\left(x,t\right) = \operatorname{clos}\left\{x \in R^n : u\left(x,t\right) \ne 0\right\}.$$

Математична постановка задачі даної роботи: довести, що задача Коші для параболічних рівнянь вищенаведеної структури (1) з умовою (2) має властивість скорочення носія розв'язку. Це важлива задача з точки зору прикладної математики та математичної фізики.

Для досягнення поставленої мети вирішувались наступні задачі:

– отримати інтегральні оцінки, що пов'язують різні норми розв'язку;

– звести інтегральні співвідношення до недиференціальної нерівності та проаналізувати її;

– встановити властивість стиснення носія.

4. Метод розв'язання задачі

Метод дослідження є результатом еволюції ідей, які походять з теорії лінійних параболічних та еліптичних рівнянь. Він може бути застосований з різноманітними цілями та для різних рівнянь. Сутність цього підходу полягає в отриманні та аналізі спеціальної (недиференціальної) нерівності, яка зв'язує енергетичні норми розв'язку.

5. Результат дослідження поведінки носія розв'язку рівняння (1)

Перш за все, наведемо тут означення, що дасть змогу на строгому математичному рівні навести отриманий результат.

Означення. Задача Коші (1), (2) має властивість миттєвої компактифікації, якщо для будь-якого $t>0$ носій її розв'язку $u(x, t)$ обмежений, навіть якщо він не обмежений при $t=0$.

Основним результатом проведених досліджень є наступна теорема.

Теорема. В обох випадках

– $0<\lambda<1, \quad p\geq 1$;

– $0<\lambda<p$,

– якщо $\dfrac{n-2}{n+2}<p<1$, коли $n>2$;

– якщо $0<p<1$, коли $n\leq 2$.

задача (1), (2) має властивість "миттєвої компактифікації".

6. Доведення властивості скорочення носія розв'язку

Для доведення Теореми про компатифікацію носія розв'язку задачі (1), (2) нам знадобляться добре відома слідова нерівність Гальярдо-Ніренберга, що буде наведена нижче, а також наступна лема, яка не є тривіальним фактом і тому потребує строгого математичного доведення.

Лема 1. Якщо $f(\tau, s)$ – додатня, зростаюча функція, що задовольняє нерівності

$$f\left(\tau+f^{\alpha}(\tau,s),\ s+f^{\beta}(\tau,s)\right)\leq \delta f(\tau,s) \tag{3}$$

– для кожного $\tau>\tau_0,\ s>s_0,\ \delta>1,\ \alpha>0,\ \beta>0,$ тоді виконується:

$$f(\tau,s)\equiv 0$$

– для всіх (τ, s) таких, що:

$$\tau>\tau_0+\frac{1}{1-\delta^{\alpha}}f^{\alpha}(\tau_0,s_0),\ s>s_0+\frac{1}{1-\delta^{\beta}}f^{\beta}(\tau_0,s_0).$$

Доведення Леми 1.

Визначимо послідовності наступним чином:

$$\tau_{i+1}=\tau_i+f^{\alpha}(\tau_i,s_i),\ s_{i+1}=s_i+f^{\beta}(\tau_i,s_i),\ i=1,2,\ldots$$

Тоді з (3) маємо

$$f(\tau_{i+1},s_{i+1})\leq \delta f(\tau_i,s_i).$$

Після ітерації отримаємо

$f(\tau_{j+1},s_{j+1})\leq \delta^j f(\tau_0,s_0)$ для кожного $j\in N$. Тоді:

$$\tau_{j+1}=\tau_j+f^{\alpha}(\tau_j,s_j)=\tau_{j-1}+f^{\alpha}(\tau_{j-1},s_{j-1})=f^{\alpha}(\tau_j,s_j)=$$
$$=\tau_0+\sum_{i=0}^{j}f^{\alpha}(\tau_i,s_i)\leq \tau_0+f^{\alpha}(\tau_0,s_0)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{j}\delta^{i\alpha}\leq \tau_0+f^{\alpha}(\tau_0,s_0)\cdot\frac{1}{1-\delta^{\alpha}}.$$

Аналогічним чином можна отримати нерівність:

$$s_{j+1}\leq s_0+f^{\beta}(\tau_0,s_0)\cdot\frac{1}{1-\delta^{\beta}}.$$

З того факту, що

$$\lim f(\tau_j,s_j)=0,\ j\to\infty$$

і оскільки послідовності рівномірно обмежені, випливає необхідний результат. Отже, лема доведена.

Доведення Теореми.

Для будь-яких чисел

$$0\leq\tau_1<\tau_2\leq T,\quad 0<s_1<s_2<\infty,$$

позначимо через

$$\Omega(s_1)=\left\{x\in R^n:|x|>s_1\right\}\ \text{– зовнішність сфери;}$$

$$G_{\tau_1}^{\tau_2}(s_1)=\Omega(s_1)\times(\tau_1,\tau_2)\ \text{– зовнішність циліндра;}$$

$$K_{\tau_1}^{\tau_2}(s_1,\ s_2-s_1)=G_{\tau_1}^{\tau_2}(s_1)\setminus G_{\tau_1}^{\tau_2}(s_2).$$

Тепер фіксуємо $\tau>0,\ s>0,\ \Delta\tau>0,\ \Delta s>0$ та вводимо $\eta(x,t)$ і $\eta_1(x)$:

$$\eta=1\ \text{ в }\ G_{\tau+\Delta\tau}^{T}(s+\Delta s);\ \ \eta=0\ \text{ в }\ R^n\times(0,T)\setminus G_{\tau}^{T}(s),$$

$$\eta_1=1\ \text{ в }\ \Omega(s+\Delta s),\ \ \eta_1=0\ \text{ в }\ \mathbb{R}^n\setminus\Omega(s).$$

Припустимо, що

$$0\leq\eta_k\leq\frac{c}{\Delta s},\ \left|\eta_{x_i}\right|\leq\frac{c}{\Delta s},\ \left|\eta_{1x_i}\right|\leq\frac{c}{\Delta s}.$$

При цьому $\eta_k=0$ якщо $\tau+\Delta\tau<t<T$ й $\nabla\eta=0$ якщо $|x|>s+\Delta s.$

Означення. Енергетичним розв'язком (1), (2) називається функція така, що

$$u(x,t)\in C\left((0,T);L_2(R^n)\right)\cap$$
$$\cap L_{1+p}\left((0,T);W_{p+1}^1(R^n)\right)\cap L_{\lambda+1}\left(R^n\times(0,T)\right)$$

і задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int_{R^n}u(x,T_0)v(x,T_0)dx-\int_0^{T_0}\int_{R^n}u(x,t)v_t(x,t)dxdt+$$
$$+\int_0^{T_0}\int_{R^n}\left[|\nabla u|^{p-1}u_{x_i}v_{x_i}+|u|^{\lambda-1}uv\right]dxdt=\int_{R^n}u_0(x)v(x,0)dx,$$

де

$$v\in L_{\lambda+1}\left(\mathbb{R}^n\times(0,T)\right)\cap W_{p+2,2}^{1,1}\left(\mathbb{R}^n\times(0,T)\right).$$

Зауважимо тут, що існування розв'язку в зазначеному вище сенсі широко відоме, якщо $1 \le p$ та $0 < \lambda \le p$ – див. з цього приводу [2–4].

Покладемо

$$E_T(\tau,s) = \int_{G_\tau^T(s)} u^2 dxdt,$$

$$I_T(\tau,s) = \int_{G_\tau^T(s)} |u|^{p+1} dxdt.$$

Якщо ми покажемо, що для $\forall \tau > 0 \ \exists s(\tau) < \infty$:

$$H = H_T(\tau,s) := E_T(\tau,s) + I_T(\tau,s) = 0,$$

тоді (завдяки Лемі 1) отримаємо Теорему.

Таким чином, достатньо показати:

$$H_T(0,s) \to 0, \ s \to \infty,$$

$$H(\tau + H^\alpha, s + H^\beta) \le \mu H, \ \alpha > 0, \ \beta > 0, \ \ 0 < \mu < 1.$$

Зробимо заміну $v = u\eta^{p+1}$ в інтегральній тотожності та проінтегруємо частинами

$$\begin{aligned}&2^{-1}\int_{R^n} u^2(x,T)\eta^{p+1}(x,T)dx + \\ &+\int_0^T\int_{R^n}\left[|\nabla u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}\right]\eta^{p+1}dxdt = \\ &= (p+1)\int_0^T\int_R (2^{-1}u^2\eta_t + |\nabla u|^{p-1}u_{x_i}u\eta_{x_i})\eta^p dxdt. \qquad (4)\end{aligned}$$

До правої частини (4) застосуємо нерівність Юнга з ε:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(s)} u^2\eta^{p+1}dx + \int_{G_\tau^T(s)}\left(|\nabla u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}\right)\eta^{p+1}dxdt \le \\ &\le c\left[I_T + E_T\right] := cR_1. \qquad (5)\end{aligned}$$

Застосуємо нерівність Гальярдо-Ніренберга:

$$\|v\|_{\alpha,\Omega(s)} \le d_1 \|\nabla v\|^{\Theta}_{\beta,\Omega(s)} \|v\|^{1-\Theta}_{\gamma},$$

де використанні стандартні позначення норми та показників

$$\|v\|_{\alpha,\Omega} := \left(\int_\Omega |v|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \ \frac{1}{\alpha} = \Theta\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{n}\right) + (1-\Theta)\frac{1}{\gamma}, \ \gamma > 1, \ \beta > 1$$

при $\alpha = 2, \ \beta = p+1, \ \gamma = \lambda + 1$ та залучаємо нерівність Юнга:

$$\left(\int_{\Omega(\bar{s})} u^2 dx\right)^{1-\nu} \le c\int_{\Omega(\bar{s})}\left(|\nabla u|^{p+1} + |u|\lambda + 1\right)dx, \ \bar{s} > s_0 > 0,$$

де

$$\nu = \frac{(p+1)(1-\lambda)}{2(p+1) + n(p-\lambda)} < 1.$$

Інтегрування приводить до нерівності:

$$\Psi^T_{\bar{\tau},\bar{s}}(1-\nu) := \int_{\bar{\tau}}^T \left(\int_{\Omega(\bar{s})} u^2 dx\right)^{1-\nu} dt \le c\int_{G_{\bar{\tau}}^T(\bar{s})}\left(|\nabla u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}\right)dxdt.$$

Повертаємось до інтегральної тотожності з тестуючою функцією

$$v = u\eta^{p+1}\chi_l(t), \ l > 0, \ \chi_l(t) = \int_0^t\left(\int_{\Omega(s)} u^2\eta^{p+1}dx\right)^l dt, \ t > 0.$$

і отримаємо

$$\begin{aligned}&\chi_{l+1}(T) = \\ &= \chi_l(T)\int_{\Omega(s)} u^2\eta^{p+1}dx + \int_{G_\tau^T(s)}\left[2|u|^{\lambda+1}\eta^{p+1} - u^2\left(\eta^{p+1}\right)_t\right]\chi_l(t)dxdt + \\ &+ \int_{G_\tau^T(s)}\left[2|\nabla u|^{p-1}u_{x_i}\left(u\eta^{p+1}\right)_{x_i}\right]\chi_l(t)dxdt,\end{aligned}$$

звідки з урахуванням (5) маємо:

$$\chi_{l+1}(T) \le c\chi_l(T)R_1.$$

За допомогою нерівності Гельдера та інтегруючи останню нерівність:

$$\chi_l(T) \le c\chi_\delta(T)R_1^{l-\delta} \text{ для деяких } l > \delta > 0.$$

За означенням η(x, t) та попередніх викладок отримаємо низку нерівностей, які є ключовими:

$$\Psi^T_{\tau+\Delta\tau,s+\Delta s}(l) \le \chi_l(T) \le \Psi^T_{\tau,s}(l),$$

$$\Psi^T_{\tau,s}(1-\nu) \le cR_1(s,\Delta s,\tau,\Delta\tau), \qquad (6)$$

$$\chi_1(T) \le c\chi_{1-\nu}(T)R_1^\nu(s,\Delta s,\tau,\Delta\tau), \qquad (7)$$

$$\chi_{1-\nu}(T) \le \Psi^T_{\tau,s}(1-\nu). \qquad (8)$$

Тепер за означенням енергетичної функції E_T:

$$\Psi^T_{\tau+\Delta\tau,s+\Delta s}(1) := E_T(\tau+\Delta\tau, s+\Delta s) \le \chi_1(T). \qquad (9)$$

Підставляємо (7) в (9) та використовуючи (8) й (6) отримаємо, що

$$E_T(\tau+\Delta\tau, s+\Delta s) \le cR_1^{1+\nu}(s,\Delta s,\tau,\Delta\tau). \qquad (10)$$

Зауважимо тут, що починаючи з цього місця слід розрізняти три можливі випадки:

p=1;

p>1;

0<p<1,

оскільки подальший (і заключний) хід доведення залежить саме від того, яке значення набуває параметр p.

Випадок p=1.

Якщо p=1, то

$$I_T(\tau, s) = E_T(\tau, s).$$

Отже, доведення тривіальне, бо відразу випливає:

$$\forall\tau>0\,\exists s(\tau)<\infty: H=H_T(\tau,s):=$$
$$:=E_T(\tau,s)+I_T(\tau,s)=2\cdot E_T(\tau,s),$$

Тож, за (10) та завдяки Лемі 1 отримаємо результат Теореми.

Випадок p>1.

Розглянемо тепер нетривіальний випадок, коли параметр більший за 1, тобто p>1. Покладемо в інтегральній тотожності

$$\alpha=p+1,\ \beta=p+1,\ \gamma=2.$$

Після інтегрування по t та застосовуючи нерівність Гельдера отримаємо

$$I_T(\tau+\Delta\tau,s+\Delta s)\le$$
$$\le c\left(\int\limits_{G^T_{\tau+\Delta\tau}(s+\Delta s)}|\nabla u|^{p+1}dxdt\right)^{\theta_1}\left(\Psi^T_{\tau+\Delta\tau,s+\Delta s}\left(\frac{p+1}{2}\right)\right)^{1-\theta_1}, \qquad (11)$$

де

$$\theta_1=\frac{n(p-1)}{2(p+1)+n(p-1)}<1.$$

Нерівності (6)–(8) при $l=\dfrac{1+p}{2}$ та $\delta=1-\nu$ приводять до наступного співвідношення

$$\Psi^T_{\tau+\Delta\tau,s+\Delta s}\left(\frac{p+1}{2}\right)\le c\Psi^T_{\tau,s}(1-\nu)R_1^{\frac{1+p}{2-1+\nu}}.$$

Застосуємо до останньої викладки результат (10) і отримаємо

$$\Psi^T_{\tau+\Delta\tau,s+\Delta s}\left(\frac{p+1}{2}\right)\le cR_1^{\frac{1+p}{2+\nu}}.$$

Якщо застосуємо останню нерівність до відношення (11), то

$$I_T(\tau+\Delta\tau,s+\Delta s)\le cR_1^{1+\nu_1},$$
$$\nu_1=(1-\theta_1)\left(\frac{p-1}{2}+\nu\right)=\frac{\nu(p-\lambda)}{1-\lambda}>\nu. \qquad (12)$$

Складаємо (10) та (12), користуємось означенням функції R_1,

$$H_T(\tau+\Delta\tau,s+\Delta s)\le$$
$$\le c_0\Delta_\tau E_T(\tau,s)\left[\frac{(\Delta_\tau E_T(\tau,s))^{\nu}}{(\Delta\tau)^{1+\nu}}+\frac{(\Delta_\tau E_T(\tau,s))^{\nu_1}}{(\Delta\tau)^{1+\nu_1}}\right]+$$
$$+c_0\Delta_s I_T(\tau,s)\left[\frac{(\Delta_s I_T(\tau,s))^{\nu}}{(\Delta s)^{(1+p)(1+\nu)}}+\frac{(\Delta_s I_T(\tau,s))^{\nu_1}}{(\Delta s)^{(1+p)(1+\nu_1)}}\right],$$

де

$$\Delta_\tau f(\tau,s):=f(\tau,s)-f(\tau+\Delta\tau,s),$$

$$\Delta_s f(t,s):=f(\tau,s)-f(\tau,s+\Delta s).$$

Тепер фіксуємо

$$\Delta s=(I_T(\tau,s))^{\frac{\nu}{(p+1)(\nu+1)}},\ \Delta\tau=(E_T(\tau,s))^{\frac{\nu}{1+\nu}}.$$

І з того, що E та I монотонні, переходимо до нерівності

$$H_T\left(\tau+H_T^{\frac{\nu}{1+\nu}}(\tau,s,),s+H_T^{\frac{\nu}{(1+p)(1+\nu)}}(\tau,s)\right)\le\mu_1 H_T(\tau,s). \qquad (13)$$

У ***випадку 0<p<1*** можна легко (використовуючи той самим підхід) отримати нерівність аналогічну до (13), яка і завершить низку викладок нашого доведення, але, звичайно з іншим показником, а саме з

$$\nu_1=\frac{\nu(p-\lambda)}{1-\lambda}<\nu.$$

7. Обговорення результату про поведінку носія розв'язку

Результати, наприклад, [7, 8], [11] були отримані для невід'ємних розв'язків і з умовою на початкову функцію: або ця функція прямує до нуля, коли $|x|\to\infty$, або вона має мажоранту. Виходить, що якщо початкова функція не має монотонної мажоранти, тоді навіть для самого простого рівняння

$$u_t=u_{xx}-u^p,\ 0<p<1$$

ми нічого не можемо сказати про поведінку розв'язку. Це спонукало автора продовжити раніше проведені дослідження. Крім того, підкреслимо тут, що автори [5, 10] та ін. застосовували принцип максимуму для досліджень. Але, на жаль, для рівнянь більш високого порядку ми не маємо таких принципів. Тож, виникає актуальна проблема, яка і була вирішена в рамках даної роботи, – адаптування більш універсального підходу до вивчення задачі (1), (2), який дає змогу аналізувати поведінку розв'язку в ситуаціях більш складних та загальних.

8. Висновки

В результаті проведених досліджень:

– знайдені співвідношення, які містять L_2, L_{q+1} та $L_{\lambda+1}$ норми розв'язку;

– отримані функціональні залежності виду (3) шляхом застосування нерівностей Юнга, Гельдера, Гальярдо-Ніренберга до інтегральних оцінок; проведено аналіз співвідношень (3), (10), (13);

– доведено, що носій розв'язку задачі (1), (2) обмежений при t>0.

Зазначимо тут, що цікавою, важливою (але окремою) задачею, яка не була реалізована в рамках цього дослідження, є оцінка розміру носія. Щодо питання знаходження оцінок носія можна ознайомитись з роботами [15–17].

Подяка

Ця робота була виконана за фінансової підтримки Фонду ім. Н. І. Ахієзера.

Література

1. Bernis, F. Finite speed of propagations and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption [Text] / F. Bernis // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. – 1986. – Vol. 104, Issue 1-2. – P. 1–19. doi: 10.1017/s030821050001903x
2. Bernis, F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains [Text] / F. Bernis // Mathematische Annalen. – 1988. – Vol. 279, Issue 3. – P. 373–394. doi: 10.1007/bf01456275
3. Kersner, R. Instantaneous shrinking of the support of energy solutions [Text] / R. Kersner, A. Shishkov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1996. – Vol. 198, Issue 3. – P. 729–750. doi: 10.1006/jmaa.1996.0110
4. Шишков, А. Е. Мёртвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка [Текст] / А. Е. Шишков // Матем. сб. – 1999. – Т. 190, № 12. – С. 129–156.
5. Antontsev, S. N. The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms [Text] / S. N. Antontsev, J. I. Diaz, S. I. Shmarev // Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques. – 1995. – Vol. 4, Issue 1. – P. 5–30. doi: 10.5802/afst.790
6. Alt, H. W. Quasiliner elliptic-parabolic differential equations [Text] / H. W. Alt, S. Luckhaus // Mathematische Zeitschrift. – 1983. – Vol. 183, Issue 3. – P. 311–341. doi: 10.1007/bf01176474
7. Evans, L. C. Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain parabolic equations and variational inequalities [Text] / L. C. Evans, B. F. Knerr // Illinois J. Math. – 1979. – Vol. 23. – P. 153–166.
8. Brezis, H. Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities [Text] / H. Brezis, A. Friedman // Illinois J. Math. – 1976. – №20. – P. 82–97.
9. Kersner, R. The nonlinear heat equation with absorption: effects of variable coefficients [Text] / R. Kersner, F. Nicolosi // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1992. – Vol. 170, Issue 2. – P. 551–566. doi: 10.1016/0022-247x(92)90036-d
10. Калашников, А. С. О квазилинейных вырождающихся параболичес– ких уравнениях с сингулярными младшими членами и растущими начальными данными [Текст] / А. С. Калашников // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 6. – С. 999–1009.
11. Gilding, B. H. Instantaneous shrinking in nonlinear diffusion-convection [Text] / B. H. Gilding, R. Kersner // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1990. – Vol. 109, Issue 2. – P. 385–394. doi: 10.1090/s0002-9939-1990-1007496-9
12. Kersner, R. Shocks and free boundaries: The local behaviour [Text] / R. Kersner, R. Natalini, A. Tesei // Asymptotic Anal. – 1995. – Vol. 10. – P. 77–93.
13. Stiepanova, K. V. Instantaneous compactification of the support of solutions for nonlinear diffusion-reaction equations [Text] / K. V. Stiepanova // International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference. – 2016. – Vol. 1 – P. 39–42.
14. Тедеев, А. Ф. Финитность носителя решения задачи Дирихле уравнения диффузии с неоднородным источником в областях типа октант [Текст] / А. Ф. Тедеев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 180–192.
15. Дегтярев, С. П. Об условиях мгновенной компактификации носителя решения и о точных оценках носителя в задаче Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и абсорбцией [Текст] / С. П. Дегтярев // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 4. – С. 37–64.
16. Дегтярев, С. П. Явление мгновенной компактификации носителя в условиях неоднородной абсорбции и при возможном росте начальных данных [Текст] / С. П. Дегтярев // Доповіді Національної академії наук України. – 2008. – № 12. – С. 13–22.
17. Дегтярев, С. П. Мгновенная компактификация носителя решения задачи Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности [Текст] / С. П. Дегтярев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 47–54.